Kurs C.8-15: Elemente der mathematischen Logik

Allgemeiner Überblick

Dieser Kurs bietet eine Einführung in die formalisierte symbolische Logik (mathematische Logik) und stellt sie der klassischen, ontologischen Logik gegenüber.

Ausgehend von Alfred Tarskis Standardwerk untersucht der Kurs, wie die mathematische Logik als abstrakter Symbolkalkül funktioniert, der die Sprache von inhaltlicher Bedeutung befreit, um mit leeren syntaktischen Hüllen zu operieren.

Anhand der Analyse von Funktionen, Variablen und Quantoren wird der Aufbau der Aussagenlogik sowie der Klassen- und Relationslogik erläutert. Besonderes Augenmerk gilt dabei der materiellen Implikation des Megarikers Philon von Megara und den Wahrheitstafeln.

Anschließend werden bekannte logische Probleme behandelt, darunter das Ähnlichkeitsgesetz von Leibniz und das Lügnerparadoxon. Dabei wird die logistische Lösung mithilfe einer Metasprache der Urteilsenthaltung des natürlichen Denkens gegenübergestellt.

Schließlich legt der Kurs die philosophische Tiefenstruktur offen: Die mathematische Logik gründet auf einem radikalen Nominalismus, der die Wirklichkeit auf vom Menschen geschaffene Vereinbarungen und einzelne Zeichen reduziert. Wird dieser Ansatz auf die Lebenswirklichkeit des Menschen angewandt, entsteht eine kalte Welt ohne Seele und ethische Verankerung.

Zusammenfassung

1: Grundlagen der mathematischen Logik und der Unterschied zur traditionellen Logik

Ziel des Kurses ist es, ein klares und fundiertes Verständnis der formalisierten symbolischen Logik — der mathematischen Logik — zu vermitteln, die seit dem Ende des 19. Jahrhunderts von Denkern wie Gottlob Frege und Alfred Tarski als Denkform für die Naturwissenschaften und die Technik entwickelt wurde.

Dabei zieht der Kurs eine klare Grenze zwischen der traditionellen (natürlichen) Logik und der modernen mathematischen Logik. Während die klassische Logik ein Teilgebiet der Philosophie ist, das nach inhaltlicher Identität, Ähnlichkeit oder kausalen Zusammenhängen zwischen Sachverhalten der Wirklichkeit sucht, ist die mathematische Logik eine mathematische Verknüpfung von Symbolen (Kombinatorik).

In der mathematischen Logik werden Begriffe und Aussagen ihrer semantischen Bedeutung entkleidet und auf „leere Hüllen“ oder Symbole reduziert, mit denen sich nach streng syntaktischen und axiomatisch-deduktiven Regeln operieren lässt.

Obwohl bedeutende Logiker wie Tarski behaupten, dass die mathematische Logik die gemeinsame Grundlage aller Wissenschaften und korrekten Schlussfolgerungen bilde, erkennt Tarski selbst ihre eindeutigen Anwendungsgrenzen an.

In der empirischen Praxis und im menschlichen Alltag, in denen Menschen tastend und handelnd in einer komplexen Wirklichkeit stehen, erweist sich die starre axiomatisch-deduktive Methode allein als unzureichend. Die natürliche Logik bleibt daher unverzichtbar.

2: Der logistische Funktionsbegriff, Variablen und Quantifizierung

Die Sprache der mathematischen Logik beruht auf der Unterscheidung zwischen Konstanten und Variablen. Eine Konstante (etwa eine bestimmte Zahl oder ein festes Symbol) behält während der gesamten Darstellung ihre Bedeutung bei, während eine Variable (wie „x“ oder „y“) ein veränderliches Symbol ist, das als leere Hülle fungiert.

Wenn eine Variable in einem Ausdruck wie „‚x‘ ist eine ganze Zahl“ vorkommt, handelt es sich noch nicht um eine eigentliche Aussage, sondern um eine Aussagenfunktion. Erst wenn die Variable „x“ durch eine Konstante ersetzt wird (beispielsweise durch die Zahl 1), entsteht eine Aussage mit einem Wahrheitswert (wahr oder falsch). Werden Variablen verwendet, um Objekte oder Zahlen mathematisch zu beschreiben (wie in „2x + 1“), spricht man von einer deskriptiven oder designativen Funktion.

Neben dem direkten Einsetzen von Konstanten verwendet die mathematische Logik die Quantifizierung, um aus einer Aussagenfunktion eine echte Aussage zu machen. Dazu werden Quantoren (Operatoren) eingeführt:

- *Der Allquantor*: drückt aus, dass eine Funktion für *alle* Elemente gilt („für alle ‚x‘ gilt, dass …“).

- *Der Existenzquantor*: drückt aus, dass eine Funktion für *einige* oder mindestens ein Element gilt („es gibt mindestens ein ‚x‘, sodass …“).

- *Der Einzelquantor*: bezieht sich auf *genau ein* bestimmtes Individuum.

Durch das Hinzufügen dieser Quantoren werden freie Variablen in gebundene Variablen umgewandelt, wodurch eine formal übersichtliche und strenge Kalkülstruktur entsteht.

3: Aussagenlogik, materielle Implikation und Wahrheitstafeln

In der Aussagenlogik (dem Aussagenkalkül) werden nicht weiter analysierte Sätze als grundlegende Bausteine behandelt. Mithilfe logischer Konstanten oder Funktoren werden diese atomaren Sätze zu molekularen Aussagen verbunden:

- *Die Negation*: kehrt den Wahrheitswert eines Satzes um.
- *Die Konjunktion* („und"): ist wahr, wenn beide Bestandteile wahr sind.
- *Die Disjunktion* („oder"): wird in der mathematischen Logik durchgehend im nicht ausschließenden Sinn verwendet (inklusives *vel*). Das bedeutet, dass die Disjunktion bereits wahr ist, wenn mindestens eines ihrer Glieder wahr ist.

Ein entscheidender Bruch mit dem natürlichen Denken ist die materielle Implikation („wenn ‚p', dann ‚q'"), die auf den antiken megarischen Denker Philon von Megara zurückgeht. In der natürlichen Logik setzt eine „Wenn-dann"-Schlussfolgerung einen inhaltlichen oder kausalen Zusammenhang zwischen Vorder- und Nachsatz voraus.

In der mathematischen Logik wird dieser Zusammenhang vollständig aufgehoben: Die materielle Implikation ist ausschließlich eine Verknüpfung von Wahrheitswerten. Eine Implikation ist in der mathematischen Logik immer „wahr", außer wenn der Vordersatz wahr und der Nachsatz falsch ist. Daher gelten bizarre Aussagen wie „Wenn $2 \times 2 = 5$, dann ist New York eine große Stadt" in der mathematischen Logik als vollkommen „wahr". Für den gesunden Menschenverstand wirkt dies absurd, weil zwischen den beiden Aussagen keinerlei sachlicher Zusammenhang besteht.

Um die Wahrheitswerte komplexer zusammengesetzter Funktionen mechanisch und übersichtlich zu berechnen, verwendet die mathematische Logik Wahrheitstafeln (Wahrheitsmatrizen), die von Charles Sanders Peirce eingeführt wurden.

4: Ähnlichkeit, Klassenlogik und Relationslogik

Der logistische Begriff der „Ähnlichkeit" oder „Identität" („$x = y$") beruht auf Gottfried Wilhelm Leibniz' berühmtem Gesetz: Zwei Objekte sind genau dann identisch, wenn sie sämtliche Eigenschaften gemeinsam haben. Diese

Relation folgt drei festen Gesetzen: Reflexivität („x = x“), Symmetrie (wenn „x = y“, dann „y = x“) und Transitivität (wenn „x = y“ und „y = z“, dann „x = z“).

Im Gegensatz zur ontologischen Logik, die von der inneren, unteilbaren Identität eines Wesens mit sich selbst ausgeht, reduziert die mathematische Logik Identität auf eine symmetrische Ähnlichkeitsrelation zwischen einzelnen Elementen.

In der Klassenlogik (begründet von George Boole und Georg Cantor) werden Individuen zu Mengen oder Klassen zusammengefasst. Die Aussage „„x ∈ K“ bedeutet, dass das Individuum „x“ zur Klasse „K“ gehört. Der Kurs zeigt, dass das klassische logische Denken Begriffe auf zwei Arten auffasst:

- *Distributiv* (Klasse): alle einzelnen Exemplare getrennt betrachten (beispielsweise „alle Menschen“).
- *Kollektiv* (System): das zusammenhängende Ganze betrachten (beispielsweise „die gesamte Menschheit“).

In der Relationslogik (entwickelt von Augustus De Morgan und Charles Peirce) werden Beziehungen zwischen Vorgängern (dem Definitionsbereich) und Nachfolgern (dem Wertebereich) formal berechnet, etwa in der Relation „„x‘ ist der Vater von ‚y“ oder „„x > y“.

5: Das Lügnerparadoxon und der philosophische Nominalismus

Ein bewährter Prüfstein für formal-logische Systeme ist das berühmte Lügnerparadoxon: die Aussage „Was ich jetzt sage, ist falsch“.

Logiker wie Tarski und Józef Maria Bochenski vertreten die Auffassung, dass dieses Paradoxon entsteht, weil eine Sprache über sich selbst spricht. Sie lösen es, indem sie eine strikte Ebenentrennung zwischen der Objektsprache (die über die Wirklichkeit spricht) und der Metasprache (die über die Objektsprache spricht) einführen. Dadurch wird der Lügner-Satz als syntaktisch ungültig oder semantisch unsinnig ausgeschlossen.

Die natürliche Logik nähert sich dem Paradoxon dagegen durch Urteilsenthaltung: Da sowohl der genaue Inhalt von „was ich jetzt sage“ als auch die tatsächliche Absicht hinter „ist falsch“ unbekannt sind, kann der gewöhnliche Verstand schlicht kein endgültiges Urteil fällen.

Der Kurs schließt mit der Offenlegung des tiefsten philosophischen Axioms hinter der mathematischen Logik: des Nominalismus. Dieser leugnet, dass es in der Wirklichkeit objektive Seinsstrukturen, Wesenheiten oder innere

Formen (*eide*) gibt. Alles wird auf willkürliche Namen, einzelne Symbole und von Menschen geschaffene Vereinbarungen reduziert.

Durch John Deweys pragmatischen Instrumentalismus und seine Vorstellung von *Social Engineering* mündet dieser Nominalismus in das moderne Dogma, dass „alles, was ist, gestaltbar ist“. Wird dieser reduktive Symbolkalkül auf die Lebenswirklichkeit und die menschliche Seele angewandt, entsteht eine kalte, mechanische Welt, in der universelle ethische Normen verschwinden und rein pragmatischen und technokratischen Vereinbarungen Platz machen.