Curso C.8-15: Elementos de lógica matemática

Generalidades

Este curso ofrece una introducción a la lógica simbólica formalizada (lógica matemática) y la contrapone a la lógica clásica, de carácter ontológico.

Partiendo de la obra de referencia de Alfred Tarski, el curso examina cómo la lógica matemática funciona como un cálculo abstracto de símbolos que despoja al lenguaje de su contenido semántico para operar con envolturas sintácticas vacías.

Mediante el análisis de funciones, variables y cuantificadores, se explica la estructura de la lógica proposicional y de la lógica de clases y relaciones, prestando especial atención a la implicación material de Filón de Megara y a las tablas de verdad.

A continuación, se abordan problemas lógicos conocidos, como la ley de semejanza de Leibniz y la paradoja del mentiroso, contraponiendo la solución lógica mediante un metalenguaje a la suspensión del juicio propia del razonamiento natural.

Por último, el curso pone al descubierto la estructura filosófica profunda de este enfoque: la lógica matemática se fundamenta en un nominalismo radical que reduce la realidad a convenciones construidas por el ser humano y a signos aislados. Cuando se aplica a las realidades de la vida humana, este enfoque genera un mundo frío, desprovisto de alma y de fundamento ético.

Resumen

1: Fundamentos de la lógica matemática y diferencias con la lógica tradicional

El objetivo del curso es proporcionar una comprensión clara y profunda de la lógica simbólica formalizada —la lógica matemática—, desarrollada desde finales del siglo XIX por pensadores como Gottlob Frege y Alfred Tarski como forma de razonamiento para las ciencias naturales y la tecnología.

El curso establece una clara distinción entre la lógica tradicional (natural) y la lógica matemática moderna. Mientras que la lógica clásica es una rama de la filosofía que busca la identidad de contenido, la semejanza o las conexiones causales entre hechos de la realidad, la lógica matemática consiste en una manipulación matemática de símbolos (combinatoria).

En la lógica matemática, los conceptos y las proposiciones se despojan de su significado semántico y se reducen a «envolturas vacías» o símbolos que pueden manipularse de acuerdo con reglas estrictamente sintácticas y axiomático-deductivas.

Aunque destacados lógicos como Tarski sostienen que la lógica matemática constituye el fundamento común de todas las ciencias y de todo razonamiento correcto, el propio Tarski reconoce sus claros límites de aplicación.

En la práctica empírica y en la vida cotidiana, donde las personas exploran y actúan dentro de una realidad compleja, el rígido método axiomático-deductivo no resulta suficiente por sí solo, y la lógica natural sigue siendo indispensable.

2: El concepto logístico de función, las variables y la cuantificación

El lenguaje de la lógica matemática se fundamenta en la distinción entre constantes y variables. Una constante (como un número concreto o un símbolo fijo) conserva el mismo significado a lo largo de toda la exposición, mientras que una variable (como «x» o «y») es un símbolo cambiante que funciona como una envoltura vacía.

Cuando una variable aparece en una expresión como «"x" es un número entero», todavía no constituye una proposición afirmativa propiamente dicha, sino una función proposicional. Solo cuando la variable «x» se sustituye por una constante (por ejemplo, el número 1), surge un enunciado con un valor de verdad (verdadero o falso). Cuando las variables se utilizan para describir matemáticamente objetos o números (como en «2x + 1»), se habla de una función descriptiva o designativa.

Además de sustituir directamente las variables por constantes, la lógica matemática utiliza la cuantificación para convertir una función proposicional en una proposición propiamente dicha. Para ello se introducen cuantificadores (operadores):

- *El cuantificador universal*: expresa que una función se cumple para *todos* los elementos («para todo "x", se cumple que…»).

- *El cuantificador existencial*: expresa que una función se cumple para *algunos* elementos o para al menos uno («existe al menos un "x" tal que…»).

- *El cuantificador singular*: se refiere a *un único* individuo determinado.

Al añadir estos cuantificadores, las variables libres se convierten en variables ligadas, lo que da lugar a una estructura de cálculo formal, clara y rigurosa.

3: Lógica proposicional, implicación material y tablas de verdad

En la lógica proposicional (el cálculo proposicional), las oraciones no analizadas se consideran elementos básicos. Mediante constantes lógicas o funtores, estas oraciones atómicas se combinan para formar proposiciones moleculares:

- *La negación*: invierte el valor de verdad de una oración.
- *La conjunción* («y»): es verdadera cuando ambas partes que la componen son verdaderas.
- *La disyunción* («o»): en la lógica matemática se utiliza sistemáticamente en sentido no exclusivo (*vel* inclusivo), lo que significa que es verdadera cuando al menos uno de sus componentes es verdadero.

Un punto de ruptura fundamental con el razonamiento natural es la implicación material («si "p", entonces "q"»), que se remonta al pensador megárico de la Antigüedad Filón de Megara. En la lógica natural, un razonamiento de tipo «si... entonces...» requiere una conexión sustantiva o causal entre el antecedente y el consecuente.

En la lógica matemática, esta conexión desaparece por completo: la implicación material es únicamente una combinación de valores de verdad. Una implicación es siempre «verdadera» en lógica matemática, excepto cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Por ello, enunciados extraños como «Si 2 × 2 = 5, entonces Nueva York es una gran ciudad» son perfectamente «verdaderos» en lógica matemática. Para el sentido común, esto parece absurdo, porque no existe ninguna conexión sustancial entre ambas afirmaciones.

Para calcular mecánica y sistemáticamente los valores de verdad de funciones compuestas complejas, la lógica matemática utiliza tablas de verdad (matrices de verdad), introducidas por Charles Sanders Peirce.

4: Semejanza, lógica de clases y lógica de relaciones

El concepto logístico de «semejanza» o «identidad» («x = y») se basa en la célebre ley de Gottfried Wilhelm Leibniz: dos objetos son idénticos si y solo si comparten todas sus propiedades. Esta relación obedece a tres leyes fijas: reflexividad («x = x»), simetría (si «x = y», entonces «y = x») y transitividad (si «x = y» e «y = z», entonces «x = z»).

A diferencia de la lógica ontológica, que parte de la identidad intrínseca e indivisible de un ser consigo mismo, la lógica matemática reduce la identidad a una relación simétrica de semejanza entre elementos separados.

En la lógica de clases (fundada por George Boole y Georg Cantor), los individuos se agrupan en conjuntos o clases. El enunciado «"x ∈ K"» significa que el individuo «x» pertenece a la clase «K». El curso muestra que el pensamiento lógico clásico entiende los conceptos de dos maneras:

- *Distributiva* (clase): considerar por separado todos los ejemplares individuales (por ejemplo, «todos los seres humanos»).
- *Colectiva* (sistema): considerar el conjunto como una totalidad interrelacionada (por ejemplo, «toda la humanidad»).

En la lógica de relaciones (desarrollada por Augustus De Morgan y Charles Peirce), las relaciones entre los antecedentes (el dominio) y los consecuentes (el codominio) se calculan formalmente, como en la relación «"x" es el padre de "y"» o «"x > y"».

5: La paradoja del mentiroso y el nominalismo filosófico

Una prueba decisiva para los sistemas lógico-formales es la célebre paradoja del mentiroso: el enunciado «Lo que estoy diciendo ahora es falso».

Lógicos como Tarski y Józef Maria Bochenski sostienen que esta paradoja surge cuando un lenguaje habla de sí mismo. La resuelven introduciendo una distinción estricta de niveles entre el lenguaje objeto (que habla sobre la realidad) y el metalenguaje (que habla sobre el lenguaje objeto), de modo que la oración del mentiroso queda excluida por ser sintácticamente inválida o semánticamente absurda.

La lógica natural, por el contrario, aborda la paradoja mediante la suspensión del juicio: dado que tanto el contenido exacto de «lo que estoy diciendo ahora» como la intención real que se esconde detrás de «es falso» son desconocidos, el sentido común sencillamente no puede emitir un juicio definitivo.

El curso concluye poniendo al descubierto el axioma filosófico más profundo que subyace a la lógica matemática: el nominalismo. Este niega que existan en la realidad estructuras objetivas del ser, esencias o formas intrínsecas (*eide*). Todo se reduce a nombres arbitrarios, símbolos aislados y convenciones construidas por el ser humano.

A través del instrumentalismo pragmático de John Dewey y de su idea de *ingeniería social* (*social engineering*), este nominalismo desemboca en el dogma moderno de que «todo lo que existe puede ser moldeado». Cuando este cálculo reduccionista de símbolos se aplica a las realidades de la vida y al alma

humana, surge un mundo frío y mecánico en el que desaparecen las normas éticas universales y son sustituidas por convenciones puramente pragmáticas y tecnocráticas.